Encore un article sur les calculatrices !

La provocation sera de courte durée ; l'artifice rhétorique sert d'avertissement au lecteur : qu'il ne cherche pas dans cet article le prosélytisme d'un professeur de mathématiques persuadé des bienfaits du bon usage des calculatrices en classe. Un titre plus sérieux et plus explicite serait:

COHABITATION ENTRE LE CALCUL NUMÉRIQUE ET LA CALCULATRICE

LE POINT DE VUE DU CONTRAT DIDACTIQUE

Alain BIREBENT
Lycée Pierre du Terrail, Pontcharra
didactique des mathématiques, Laboratoire Leibniz

Cette cohabitation commença il y a vingt ans. La belle machine, apte à faire de belles mathématiques aux yeux d'un amateur de mathématiques, en quoi pouvait-elle servir le professeur de mathématiques et ses élèves ? D'engagements en désillusions, d'innovations en résistances, les années qui suivirent l'intrusion de la calculatrice dans le monde des mathématiques scolaires, démontrèrent que des questions didactiques aussi simples, au premier abord, que l'intégration d'un instrument de calcul dans une classe comportaient de redoutables écueils.

L'un de ces écueils, et non le moindre, réside dans l'inflation des opinions qui viennent de toutes parts sur le sujet. Monsieur tout le monde : " Avec les calculatrices, ils ne savent plus calculer de tête". Le professeur, votre collègue : "Pour la plus petite addition, ils se précipitent sur leur calculatrice, quand ils en ont une ; cela favorise la paresse intellectuelle " ou bien "Il faudrait leur apprendre à se servir d'une calculatrice mais..." ou bien encore "La calculatrice tue le calcul algébrique ". Le constructeur de calculatrices : "La calculatrice demande à l'élève une rigueur tant sur la manière d'exprimer un problème, que sur la façon d'aborder les simulations numériques ; très vite cette demande amène l'élève à faire une analyse détaillée des situations..... En tant qu'outil individuel, l'élève est confronté à un choix de solutions, *son initiative étant sanctionnée par sa seule autocritique*, il doit s'auto-évaluer pour, en final, ne proposer que la solution optimale". Le parent d'élève : "Sans la calculatrice la plus performante, mon enfant risque d'être pénalisé".

Analyser ces opinions pour en faire autre chose que des opinions, parce que les questions didactiques sous-jacentes ne devraient pas rester des affaires d'opinion, c'est un peu ce qui motive mon entrée en Didactique ; et le travail que je présente s'inscrit

« petit x » n° 44, pp. 5 à 32, 1996 - 1997

dans l'ambition de transformer certaines questions didactiques en questions de la Didactique[1].

Première partie

Vingt ans déjà, disions-nous ; on peut penser que l'intrusion des calculatrices dans la classe de mathématiques a changé les pratiques de calcul, notamment les pratiques de calcul numérique. Et voilà notre première restriction : nous nous en tiendrons à cette partie des mathématiques appelée communément calcul numérique et identifiée à la gestion des nombres à partir de leurs représentations symboliques. Justifions cette restriction par l'idée que la fonction première de la calculatrice est de calculer avec des nombres.

Le calcul numérique comprend les opérations numériques et leurs différentes techniques (mentales, écrites ou instrumentales), les transformations d'expressions numériques et les règles afférentes, le traitement des égalités et inégalités numériques, les approximations. Cette gestion, originellement conçue au service d'autres activités mathématiques, (compter, mesurer, repérer, comparer, évaluer, numéroter, partager, ordonner, etc....), a développé ses propres finalités et défini un territoire mathématique et didactique. L'enseignement français lui offre une place considérable dans les programmes du secondaire. En témoigne l'exposé des objectifs et des capacités valables pour le programme de la classe de seconde : "Les problèmes et méthodes numériques doivent être largement exploités ; ils jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques et dans les différents secteurs d'intervention des mathématiques ; ils permettent aussi d'entraîner les élèves à combiner l'expérimentation et le raisonnement en mathématiques et concourent au développement des qualités de soin et de rigueur. Il convient, en outre, de mettre en valeur les aspects algorithmiques des problèmes étudiés, notamment à propos de la gestion de calculs...".

La richesse du calcul numérique, qui peut tout aussi bien s'incarner dans du "quotidien " que s'inscrire dans les constructions théoriques les plus formalisées, est travaillée par la transposition didactique[2]. C'est ainsi que nous interprétons l'élaboration successive de *systèmes de nombres* [3]

- qui sont autant de réservoirs numériques dans lesquels on puise les solutions numériques des problèmes

---

1. mémoire de D.E.A.(juillet 1996), réecrit et condensé.

2 Chevallard (1985) : "Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner ... Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le travail qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique".

3. Chevallard (1989) : "On appelle ici système de nombres tout ensemble de nombres sur lequel on a défini une addition, une multiplication, une relation d'ordre total... avec des propriétés qui autorisent toute équation du premier degré, qui n'est pas une identité, à posséder une solution unique... et en font un domaine d'intégrité dont la forme rappelle celle d'un corps algébrique clos".

- qui sont autant de pré-structures sur lesquelles on appuie le calcul algébrique [4]. L'ensemble des entiers naturels, celui des entiers relatifs, celui des décimaux, celui des rationnels sont les représentants les plus voyants de ces systèmes de nombres ; nous pouvons y ajouter les ensembles Di (D3 contient tous les décimaux avec exactement 3 chiffres derrière la virgule) et certains sous-corps de R comme $Q(\sqrt{2})$.

Soulignons que cette élaboration débouche sur l'ensemble des nombres réels, R, espace mythique que tout élève de troisième et de seconde se doit d'explorer pour être en mesure d'affronter l'étude des fonctions numériques définies et *continues* sur les intervalles de R. La bijection entre l'ensemble R et l'ensemble des points d'une droite, la complétude de R qui répare les insuffisances des ensembles D et Q à résoudre les équations et à intégrer plus tard les limites de fonctions sont autant de pré-requis supposés acquis lorsque débute l'Analyse.

Et voici notre deuxième restriction : nous travaillerons au niveau des classes de troisième et de seconde, là où s'engage (et se termine officiellement) la construction de l'ensemble R.

Dans le même exposé des objectifs et capacités valables pour le programme de seconde, on peut lire : "L'emploi des calculatrices scientifiques vient renforcer les possibilités d'étude des questions numériques, aussi bien pour effectuer des calculs que pour vérifier des résultats ou alimenter le travail de recherche. En particulier...les élèves doivent savoir, au moyen de leur calculatrice, effectuer des calculs numériques..."

Nous assistons à un lent mouvement qui pousse les enseignants et les élèves, confrontés à l'enjeu didactique que représente le calcul numérique, à installer la calculatrice comme partenaire particulier de leurs ébats.

Quel que soit le devenir de ce mouvement, il nous semble opportun d'en examiner les mécanismes, de décrire les rapports que construit l'institution scolaire pour faire vivre ensemble le calcul numérique et la calculatrice. Nous choisissons d'étudier, plus précisément, le contrat didactique qui a le mérite, à nos yeux, d'objectiver les actes d'enseignement et les pratiques de classe :

- d'une part en les inscrivant dans un ensemble de contraintes qui s'imposent aux partenaires (enseignants et élèves) dans le fonctionnement didactique
- d'autre part en décrivant les comportements de ces partenaires dans des règles contractuelles qu'ils reconnaissent.

Résumons-nous sous la forme d'une question : quel est le contrat actuel, spécifique à la calculatrice, pour du calcul numérique en classe de troisième ou de seconde ?

4. Chevallard (1989) : "Le calcul algébrique constituera le mobile essentiel et l'outil fondamental de la construction des systèmes de nombres successifs".

Deuxième partie

Où traquer ce contrat ? Dans des lieux et à des moments où il officie : dans les instructions officielles, dans les programmes scolaires, dans les manuels scolaires, dans l'évaluation scolaire[5], dans les activités de classe.

Voici un premier exemple pris dans l'évaluation organisée par le ministère de l'Éducation Nationale à l'entrée en seconde (septembre 1996)

Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de : $4{,}7 \times \dfrac{6{,}76 - 0{,}95^2}{\sqrt{5}+1}$.

$$4{,}7 \times \frac{6{,}76 - 0{,}95^2}{\sqrt{5}+1} \approx$$

Selon ses concepteurs, "cet item teste l'utilisation de la calculatrice dans un calcul relativement complexe. Aucune erreur significative ne peut être retenue ; de par sa complexité même, l'expression proposée contient plusieurs sources d'erreurs. En début de seconde, les élèves ne maîtrisent pas toujours l'usage de leur calculatrice. Les résultats de la classe[6] à cet item permettront d'apprécier le temps qu'il faudra consacrer à la prise en charge de cet apprentissage".

Que doit faire l'élève? Le choix des nombres (décimaux non entiers et irrationnel), l'absence d'encadrement ou de valeur approchée disponibles pour $\sqrt{5}$, la demande d'une valeur arrondie du résultat, tout pousse l'élève dans les bras d'une calculatrice.

Il devra alors transformer l'expression numérique en une suite d'instructions-machine, lire le résultat à l'écran et le tronquer pour obtenir 8,507. Dispose-t-il de moyens de contrôle capables, notamment, de valider le dernier chiffre? En tout cas, la valeur exacte de $\dfrac{110\,121}{16\,000} \times (\sqrt{5}-1)$, écrite dans $Q(\sqrt{5})$) lui est inaccessible et d'aucun secours.

Regardons maintenant dans des manuels.

Nous espérons trouver dans le choix des exercices, la formulation des énoncés, les relations entre le cours et les exercices, des manifestations contractuelles entre l'auteur du manuel (l'enseignant) et l'élève.

En effet, le contrat didactique gouverne la répartition des tâches entre deux pôles caractérisés : *le cours* que l'enseignant doit présenter et que l'élève doit savoir (c'est le

5. Joshua et Dupin (1993) "Bien que l'évaluation ne résume pas le contrat didactique, elle en est révélatrice en certains aspects importants. L'évaluation ne sert pas seulement à juger de la conformité de la production d'élèves avec ce qui est attendu par le professeur. Elle sert aussi à une précision fine des aspects de l'objet d'enseignement traité qui seront réellement de la responsabilité de l'élève. Un aspect de l'objet non inscrit aux contrôles, si cette absence est systématique, se dissout comme base du contrat didactique. Ceci est vrai, même si par ailleurs, une part importante de l'activité de la classe lui est consacrée."

6. 19% de réussite pour le lycée de Pontcharra

savoir institutionnel, de l'institution collège ou lycée), *les exercices* que l'enseignant doit fabriquer et que l'élève doit réussir[7].

- Voici deux exercices, typiques des entraînements au calcul numérique en classes de troisième et seconde.

• (P2, p.15)[8] *Calculer a, b, c. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

$$a=\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\ ;\ b=\frac{35}{36}\times\frac{4}{7}\times\frac{9}{10}\ ;\ c=\frac{6}{5}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}$$

• (P2, p.15) *Simplifier l'écriture des quotients suivants :*

$$A=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}\ ;\ B=\frac{3-\frac{2}{7}}{5-\frac{2}{7}}\ ;\ C=\frac{\frac{4}{5}\times 9+1}{\frac{7}{6}\times 9+1}$$

Ces énoncés proposent la même activité calculatoire, faite de manipulations sur les fractions de nombres entiers ; l'un d'entre eux parle d'un jeu d'écriture et l'autre d'un calcul assorti d'une condition d'écriture sur le résultat. Les rédactions d'énoncés ne sont pas innocentes et fonctionnent comme des codes intégrés dans le contrat. Ici, l'insistance sur l'écriture des nombres guide l'élève sur des méthodes dites de simplification.

Remarquons aussi que l'écriture fractionnaire imposée, avec des nombres entiers, invite l'élève à ne pas utiliser la calculatrice. Pour nous en persuader, remplaçons le calcul

$A_1=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ par le calcul $A_2=1\div(1\div 3+1\div 5)$ dont la présentation linéaire invite (à table) la calculatrice pour tout élève qui sait (et c'est le cas en troisième ou seconde) que la calculatrice respecte les priorités opératoires. Mais cet élève ne pourra pas écrire "$A_1=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=1{,}8175$ grâce à ma calculatrice" sans s'opposer implicitement à une démarche simplificatrice qu'il doit lire dans l'énoncé et qu'il doit respecter pour faire valoir son travail.

Enhardissons-nous en concevant l'exercice suivant :

• *Utiliser une calculatrice pour donner le nombre a suivant sous forme de fraction irréductible :*

---

7. Etonnant paradoxe : ce que l'élève ne produit pas (le cours), il doit le savoir ; ce qu'il produit (la résolution de l'exercice), il peut l'oublier. Mais la réussite de l'élève à l'exercice lui permet d'assumer pleinement, de son point de vue, sa part du contrat. Il revient à l'enseignant de désigner les savoirs en jeu, de les opérationnaliser en exercices pour lesquels la réussite de l'élève prouve l'acquisition de connaissances sur les savoirs visés.

8. P2= Pythagore seconde, T3= Terracher troisième etc...Ces manuels ont été choisis pour leur renommée dans le milieu enseignant.

$a = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}$

L'élève pourrait effectuer à la calculatrice la séquence suivante :

$5 \div 6 + 3 \div 4 - 2 \div 3 = \times 12 =$, lire 11 et écrire $a = \frac{11}{12}$. Le fera-t-il ? Nous en doutons fortement. Les parties cours des manuels ne comportent aucune théorisation susceptible d'appuyer une telle démarche. Ce sont les activités préparatoires, les travaux pratiques commentés et les "points-méthodes" qui, en *marge du cours*, se risquent à présenter l'usage d'une calculatrice mais en le restreignant à l'exécution du calcul sous la forme d'une suite d'instructions directement issue des priorités opératoires (voir annexe 1).

- Une autre situation algébrique[9] concerne les puissances.

• (P2, p.118) Donner l'écriture simplifiée de l'expression :

$A = \frac{5^{13}}{2^{15}} \times \frac{3^{16}}{5^{14}} \times \frac{2^{17}}{3^{15}}$

• (T2, p.27) Simplifier au maximum :

$B = (0,6^{-3})^3 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^{-10}$

Interrogeons-nous : simplifier se comprend comme effectuer des simplifications successives selon des règles connues (ou à connaître) tandis que donner une écriture simplifiée indique la simplicité de l'écriture finale.

Pour A cette simplicité est-elle réalisée par $2^2 \times 3^1 \times 5^{-1}$?[10] par $\frac{12}{5}$? par 2,4 ?

D'autre part cet accès à la simplicité du résultat final est de fait quasiment interdit de calculatrice à cause de la complexité de l'écriture initiale.

Toujours pas de référence officielle dans les manuels pour la place des calculatrices sinon en marge du cours. Seuls quelques exercices isolés, clairement étiquetés proposent d'employer la calculatrice. C'est le cas de l'exercice résolu suivant, accompagné d'un point méthode :

• (T2, p.21) Effectuer les calculs suivants à l'aide de la calculatrice et présenter les résultats en notation scientifique :

$A = \left(\frac{5}{3} \times 10^{-3}\right)^2 - 2,2 \times 6,1 \times 10^{-4}$

$B = \frac{3,01 \times 10^{-2} + 0,73 \times 10^{-1}}{95,2 \times 10^3}$

où toute tentative de simplification serait suicidaire!

9. Nous qualifions ainsi une situation où l'enjeu mathématique réside dans la mise en oeuvre de règles de simplification liées à la structure sous-jacente au système de nombres. Nous distinguerons les situations algébriques, géométriques, graphiques et statistiques.

10. Dans quel système numérique l'élève est-il invité à travailler ?

- Puis les calculs comportant des radicaux :

• (P3, p.43) Simplifier $\frac{6}{\sqrt{3}}$

• (P3, p.46) Calculer et écrire sous la forme la plus simple possible $(3\sqrt{7}+1)^2$

De nouveau des formulations langagières qui se réfèrent à la simplification pour désigner le calcul. Il s'agit de persuader l'élève "calculateur" que les bons résultats sont ceux qui s'expriment avec des nombres entiers, de discréditer en conséquence la calculatrice sous le prétexte qu'elle ne peut pas fournir de tels résultats, handicapée qu'elle est par ses approximations. Pour ces raisons, l'exercice suivant :

• (T3, p.55) "Prouver que $A=\sqrt{8}\times\sqrt{2}-2\sqrt{75}+5\sqrt{12}$ est un nombre entier" devra être compris par l'élève comme interdit à sa calculatrice qui pourtant lui fournit aisément le résultat (exact).

L'autorisation d'utiliser sa calculatrice viendra avec l'exercice (spécifique à la calculatrice) :

• Vérifier, avec une calculatrice, que : $\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{5}=0$

Mais vérifier n'est pas prouver !

Laissons la parole au manuel T2, p.24 qui, dans un point-méthode, nous explique le mot simplifier :

"Sans autre précision, dans le contexte où nous sommes, cela voudra dire : obtenir l'écriture la plus lisible, accessible et immédiate possible (sans radicaux au dénominateur, en préférant $4\sqrt{3}$ à $\sqrt{48}$, avec le moins de symboles $\sqrt{\ }$ possible, etc....)" et qui note : "certaines expressions ne peuvent être simplifiées telles $3-\sqrt{7}$, $-5+2\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$." [11]

Cette note technique peut-elle lever les réticences des élèves à manipuler les écritures numériques sous les formes simplifiées proposées ? Nous en doutons et nous proposons deux raisons :

1. Ces écritures sont simples pour le mathématicien savant car il les envisage au sein d'une structure algébrique stable pour certaines opérations (Q, $Q(\sqrt{2})$) dont l'intérêt mathématique n'est pas dégagé ici. Pourrait-il l'être ? Dans quel type de problème autre que celui de structure, cette simplification est- elle fonctionnelle ?

2. Ces écritures ne sont pas simples pour l'élève mathématicien de troisième ou de seconde qui vient de les découvrir et qui surtout dispose d'une autre écriture simple qu'il connaît bien, l'écriture décimale (avec des points de suspension, si nécessaire[12]). Cette écriture décimale est stable pour toutes les opérations et l'apparence de stabilité est renforcée chez l'élève par l'usage des calculatrices.

11. Il faut apprécier les efforts d'explicitations présents dans ce manuel et quasi-inexistants dans d'autres.

12. Il faut imaginer un système numérique hybride de D_∞ .

Nous rejoignons l'hypothèse que la décimalisation des nombres, conçue par juxtaposition ou même par emboîtement[13] des systèmes de nombres Di, constitue un obstacle (épistémologique ?) au passage conceptuel de l'ensemble D à l'ensemble R.

Voici des exercices où le *calcul numérique produit une signification géométrique* car les nombres et les opérations renvoient à des grandeurs et à des manipulations de nature géométrique. La plupart des activités géométriques qui travaillent le théorème de Thalès, celui de Pythagore et la trigonométrie comportent des calculs de longueurs, d'aires, de volumes, d'angles. Ainsi :

• (P3, p.52) Un rectangle a pour dimensions 28m et 63m :
a) Calculer le diamètre du cercle circonscrit au rectangle,
b) Un carré a la même aire que celle du rectangle. Calculer le périmètre du carré.

• (P3, p.52) Une couturière doit coudre un galon tout autour d'une nappe circulaire de $2m^2$. Quelle longueur de galon doit-elle prévoir ?

• (P3, p.177) La figure ci-dessous représente un triangle ABC rectangle en A tel que BC = 10cm et AC = 3cm.
a) Calculer AB.
b) Calculer cos C ; en déduire une mesure de C à 1° près.
c) Sachant que H est le projeté orthogonal de A sur BC, calculer une valeur approchée à 0,1 cm près de AH.

Remarquons tout de suite la demande de valeurs approchées pour que les résultats retrouvent une intelligibilité liée à la situation géométrique. Comment expliquer autrement la présence des unités de longueur et d'angles ? Cette présence "appelle" celle des nombres décimaux alors que les résultats des calculs ne le sont pas nécessairement.

Dans le premier exercice, la question a) n'attend certainement pas la réponse $D = 7\sqrt{97}$ mètres mais plutôt D=68,94 mètres obtenue directement par exécution de $\sqrt{63^2 + 28^2}$ sans simplification.

Dans le deuxième exercice, nous n'imaginons pas la couturière couper $2\pi\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ mètres de galon mais plutôt 503 centimètres. La touche π de la calculatrice fait affaire, à la place du nombre π. Le couple exact-inexact des exercices précédents a laissé place au couple approché-inexact car la valeur exacte, non décimale, ne présente plus d'intérêt. Au jeu numérique d'approximation, la calculatrice s'impose d'emblée car il n'est pas question de construire des encadrements de $2\pi\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ même après sa transformation en $\sqrt{8\pi}$. Et pourtant, quel crédit apporter à la calculatrice ?. La deuxième décimale après la virgule est-elle saine ? si oui, pourquoi ?.

13. Hypothèse déjà formulée par Izorche en 1977 et Margolinas en 1988 et travaillée par Bronner (1997).

Dans le troisième exercice, posé au Brevet des Collèges en 1990, il était possible en utilisant des relations métriques ($AH \times BC = AB \times AC$) de conduire l'élève au résultat exact $AH = \dfrac{\sqrt{819}}{10}$. Il y a volonté manifeste de passer par les angles quitte à valider la démarche par le recours à la calculatrice. On a alors :

$AH = AC \times \sin(\cos^{-1} 0,3) = 2,8$ à 10^{-1} près par défaut.

La calculatrice, maintenant admise, ou justifie une valeur approchée ou réalise un calcul jugé impossible sans elle, ou exécute un calcul jugé inintéressant.

Les parties cours, maintenant, mentionnent le recours à la calculatrice (les tables trigonométriques d'autrefois) et les points-méthodes y reviennent longuement (T3 p.202, P3 p.169-170).

Mais pas plus que dans les situations algébriques susmentionnées, la pertinence de son usage n'est éclairée ni justifiée.

Terminons cette analyse préalable par un sourire :

• (T2, p.10) Vérifier à la calculatrice que : $\dfrac{(21,08 + 2,44) \times (61,7 - 8,5)}{1,12 \times 0,56} = 1995$

Par quel miracle mathématique, des calculs si compliqués avec des nombres décimaux non entiers peuvent-ils donner un nombre entier ? Faut-il croire la calculatrice, elle d'ordinaire si suspecte de trahisons dans les divisions ? Changeons l'exercice qui devient :

• Expliquer qu'il faut avoir confiance dans la calculatrice quand elle fournit l'égalité suivante : $\dfrac{(21,08 + 2,44) \times (61,7 - 8,5)}{1,12 \times 0,56} = 1995$

mais qu'il ne faut pas garder cette confiance quand elle indique que : $123\,456,23 + \dfrac{991}{1287} = 123\,457$.

Troisième partie

Nous sommes en mesure maintenant de présenter deux hypothèses conjointes pour décrire le contrat :

- il intègre l'appréciation, par chacun des partenaires, du pouvoir mathématique de l'instrument de calcul,
- il intègre la distinction, dans le calcul numérique, entre exécution et simplification.

Cette description du contrat, autour de deux sources de contraintes, condense plusieurs constats :

- la dualité du calcul numérique, à la fois outil de résolution de problèmes et objet d'étude pour impulser ou appuyer des démarches algébriques ;

- l'existence de systèmes de nombres choisis pour leur plasticité didactique, soit réservoirs numériques, soit pré-structures algébriques ;
- la prééminence théorique de l'ensemble préconstruit R ;
- les capacités, actuelles, des calculatrices, essentiellement axées sur l'exécution des calculs dans un système numérique inclus dans l'ensemble D ;
- l'obligation de mener des approximations numériques avec de faibles bagages théoriques.

Présentons chacune des deux hypothèses de façon plus détaillée.

Première hypothèse (centrée sur la calculatrice)

La calculatrice dispose d'une autorité mathématique dans la mesure où ce qu'elle affiche peut faire autorité. Cette autorité relève d'un pouvoir mathématique qui s'impose de facto aux élèves et à l'enseignant. Ceux-ci, conjointement ou séparément selon les situations, composent avec ce pouvoir.

La reconnaissance du pouvoir

Dans l'exercice de P3 p.177, présenté précédemment, la longueur AH s'obtient par $3\times\sin(\cos^{-1}0{,}3)$ et chacun s'en remet à la calculatrice en ne doutant pas qu'elle fournisse un résultat conforme aux exigences mathématiques.

L'égalité ou la suite d'égalités qui résume mathématiquement le calcul de l'expression numérique devient une suite d'instructions que réalise la machine. Ce travail effectué par la machine apparaît à tous comme un travail mathématique et il est d'autant plus digne d'intérêt que la machine le fait vite et qu'elle est la seule, dans certaines circonstances, à pouvoir le faire.

Que la calculatrice agisse comme une boîte noire importe peu, puisqu'"elle a la courtoisie de ne rien laisser paraître - ou presque - du travail mathématique cristallisé en elle." (Chevallard, 1987). Cela se passait ainsi avec les tables trigonométriques. Cela se passe encore ainsi avec la plupart des algorithmes d'opérations qui, une fois enclenchés, fournissent un résultat incontesté.

La quantité de mathématiques invisibles qu'elle contient renforce le pouvoir de la machine.

La remise en cause du pouvoir

La calculatrice ne donne du pouvoir qu'à celui qui la courtise : l'utilisateur doit élaborer les instructions, les saisir ; il doit lire le résultat et le communiquer ; il doit maîtriser l'instrument et même apprendre son fonctionnement [14].

---

14. Rabardel (1995) décrit l'impact d'un instrument sur l'activité cognitive de son utilisateur et conclut ainsi : " le contrôle de l'ouverture du champ des actions possibles comme de l'activité requise (activité du sujet exigée par l'instrument pour son utilisation et son appropriation) constituent deux dimensions importantes de l'usage éducatif des instruments". Il précise auparavant : "Disposer d'une machine à forte puissance de calcul peut aussi bien permettre d'explorer des types de tâches mathématiques autrement inaccessibles, que supprimer des activités en elle-même formatives. De la même façon, les dimensions de structuration de l'action dont est porteur l'instrument ont la même ambivalence. Elles rendent possibles pour le sujet de nouvelles modalités d'organisation de son action, renouveler par exemple les conditions d'implications réciproques des buts et des moyens,

De plus la machine travaille en laissant peu de traces si bien que la vigilance mathématique change de nature et de forme. Elle ne peut plus s'exercer continûment sur le processus de calcul lui-même (la suite d'égalités) mais en deux temps distincts, l'un en amont (quelles instructions ?), l'autre en aval (quel résultat ?). Le contrôle sur les instructions nécessite des apprentissages (et des enseignements) nouveaux, le contrôle sur le résultat lui-même requiert souvent des connaissances mathématiques différentes de celles qui sont en jeu dans le calcul lui-même (appartenance du nombre à un ensemble, ordre de grandeur, valeurs approchées, etc....).

N'oublions pas qu'un calcul numérique ne possède d'existence mathématique qu'au sein d'un système de nombres qui englobe tant les nombres de l'expression numérique que le nombre appelé résultat de calcul. Même si le système de nombres n'est pas toujours explicité (en fin de troisième et en seconde, c'est souvent l'ensemble R, par défaut), il n'est pas absent. Celui de la calculatrice n'est ni Q, ni R et encore moins l'ensemble D, contrairement aux apparences. Aucun des nombres de la calculatrice n'a les propriétés mathématiques du nombre auquel il emprunte son écriture décimale. La calculatrice fournit un modèle de R très performant dans de nombreux calculs mais ce modèle ne peut être confondu avec l'ensemble R officialisé dès la classe de troisième.

Deuxième hypothèse (centrée sur le calcul numérique)

Un calcul est une succession d'opérations sur des nombres dont l'aboutissement est le résultat. Nous appelons simplification du calcul toute conduite qui inscrit la totalité des opérations dans un système de nombres considéré comme une structure algébrique et qui identifie le résultat à un élément de cette structure. Nous appelons exécution du calcul toute conduite qui consiste à produire un nombre reconnu comme le meilleur représentant du résultat dans un système de nombres considéré comme un réservoir numérique.

L'exécution du calcul

Elle obéit à la nécessité de disposer du résultat du calcul sans vraiment s'intéresser au calcul lui-même. Cette nécessité presque toujours dictée par l'intégration du calcul dans une autre activité (mathématique ou non) conduit à trouver une *valeur*[15] (dite exacte ou dite approchée). Nous l'avons rencontrée dans les situations géométriques mais elle existe aussi en analyse (les valeurs d'une fonction numérique), en statistiques (la valeur moyenne d'une série). L'exécution est réalisée essentiellement grâce aux règles de priorité et à divers procédés d'approximation décimale, si besoin est. Dans ce mode, le calcul peut être interprété comme une suite d'instructions disponibles sur toute calculatrice scientifique. Il suffit d'identifier, entre autres, le signe = avec la touche EXE. Avec les éditeurs d'expression actuels, la transformation du calcul ressemble à un recopiage, à condition d'avoir linéarisé l'expression numérique.

---

d'enchaînement des buts et sous-buts, de contrôle de l'action, mais elles ferment la porte à d'autres possibles."

15 La valeur d'un nombre n'est pas le nombre lui-même. A la question "combien vaut $\sqrt{2}$?", est-il possible de répondre " $\sqrt{2}$ " ? C'est le système numérique choisi (grâce au contexte) qui "valorise" le nombre.

L'ensemble D fait office de réservoir numérique, ce qui renforce la décimalisation des nombres réels[16], vivace chez les élèves jusque dans l'enseignement supérieur.

La simplification du calcul

Elle obéit à la nécessité de consolider les liens entre les différents nombres et de construire des structures numériques, le plus souvent des sous-corps de R. Cette nécessité souvent dictée par des sollicitations algébriques conduit à trouver un *nombre*[17] (élément d'un ensemble numérique structuré). La simplification est réalisée essentiellement grâce aux règles de simplification (appelées ormules au lieu de théorèmes et présentées avec des lettres comme $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$) et rarement suivie de procédures d'approximation qui pourraient obliger à sortir du système de nombres choisi. Dans ce mode, la transformation du calcul pour le rendre réalisable par la calculatrice, passe par l'élaboration de programmes spécifiques, à moins de disposer d'une calculatrice dont les capacités en calcul formel couvrent toutes les gammes imaginables de simplification. Les nombres entiers sont privilégiés même dans R. Les formes $\frac{a}{b}$, $a\sqrt{b}$, $c + a\sqrt{b}$, où a, b, c sont des entiers, indiquent *l'arrêt du calcul* pour empêcher son exécution ou sa simplification abusive. Exécuter $2 + 3\sqrt{2}$ est un crime car le résultat décimal ne contient plus les bonnes informations sur la place du nombre $2 + 3\sqrt{2}$ dans l'ensemble structuré R. Simplifier $2 + 3\sqrt{2}$ en $5\sqrt{2}$ renie les règles de priorités opératoires. Ces mêmes nécessités conduisent à sanctifier le nombre π et plus tard le nombre e qui ne sont pas réductibles dans leur écriture à des entiers.

Ces deux modes, parce qu'ils n'insèrent pas le calcul numérique de la même façon dans la mathématique, sont distingués au point d'être séparés et même opposés dans les démarches didactiques. L'exécution y apparaît comme la production d'une valeur, la simplification comme la production d'égalités numériques. Par la première, le calcul numérique sert d'*outil* de résolution d'un problème qui lui est extérieur ; par la seconde, il est traité comme un *objet*[18] dont les propriétés, au regard de la structure algébrique, et non les usages, sont jugées intéressantes.

La *concurrence* pour ne pas dire l'opposition entre les deux modes de calcul est une création de la transposition didactique ; on ne la retrouve pas dans les activités mathématiques libérées des finalités didactiques qui, au contraire, mobilisent la *concourance* des deux modes.

Cette concurrence rejaillit sur les rapports entre l'homme calculateur et la machine calculatrice. Pour caricaturer, l'exécution est machinale et la simplification est réfléchie.

---

16. Neyret (1995), en étudiant les rapports aux systèmes des nombres à la fin du collège et à l'entrée à l'I.U.F.M.(Institut de Formation des Maîtres), montre la force et la persistance de ce phénomène.
17. Plutôt que de trouver un nombre, il s'agit de retrouver le nombre sous un autre habillage, une autre écriture.
18. Nous faisons réference à la notion de dialectique outil-objet que Douady (1986) décrit ainsi : "c'est un processus cyclique organisant les rôles respectifs des enseignants et des élèves, au cours duquel les concepts mathématiques jouent alternativement le rôle d'outil pour résoudre un problème et d'objet prenant place dans la construction d'un savoir organisé".

Quatrième partie

Comment le contrat didactique, tel que nous le présentons, régit-il les rapports calculs-calculatrices dans le quotidien des classes de troisième ou de seconde ? Essentiellement, en produisant des normes, des règles, des codes générateurs de conduites chez les élèves et les professeurs. Nous regroupons quelques-unes de ces règles autour de deux lignes de force.

La territorialité de la calculatrice

Sur initiative de l'enseignant, la calculatrice est écartée de certains calculs et l'élève apprend à respecter publiquement cette territorialité, notamment dans la résolution d'exercices. Cette territorialité cherche, d'une part, à interdire de calculatrice tout calcul que l'enseignant conçoit comme une simplification, d'autre part, à recommander la calculatrice s'il s'agit d'une exécution jugée difficilement accessible voire inaccessible à la main. Cette construction est lisible :

- dans les consignes péremptoires du type "calculer sans calculatrice" ou "calculer avec calculatrice",
- dans les stratégies langagières déployées par les auteurs de manuels : calculer devient simplifier, écrire, ... ou bien calculer devient calculer une valeur approchée de...,
- dans l'insistance sur les expressions 'valeurs exactes', 'valeurs approchées',
- dans le choix des nombres et des symboles présents dans les calculs : petits nombres entiers (2 chiffres au plus) ou nombres décimaux non entiers, écriture fractionnaire ou écriture décimale, etc....,
- dans le choix du résultat attendu : obtenir un nombre entier, c'est un indice de bonne conduite "simplificatoire" !

Cette territorialité différencie les conduites calculatoires qui deviennent soit "simplificatoires", soit "exécutoires". Calculer $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ relève d'un algorithme manuel (dont la machine est exclue ; son intervention est acceptée, à la rigueur, dans un contrôle final) et calculer $\frac{4}{3}\pi(1,5)^3$ relève d'un algorithme conçu pour la machine ; l'intervention humaine est cantonnée à la mise en place de cet algorithme et acceptée, à la rigueur, dans le contrôle final).

Nous appelons algorithmes machinistes (ou calculogrammes ou séquences-machines) les organisations des calculs directement intégrables en machine. Par exemple : $\frac{4}{3}\pi(1,5)^3 = 4 \div 3 \times \pi \times 1,5x^y3 \approx 14,14$.

Ces algorithmes ont remplacé les méthodes de calcul numérique approché bâties sur les notions d'encadrement, d'erreur absolue, d'erreur relative et sur l'utilisation de tables ou de règles à calcul [19] ; ne subsistent que la notion d'ordre de grandeur et de

19. A disparu également l'algorithme *manuel* d'extraction d'une racine carrée qui fournissait "automatiquement" la valeur *décimale* approchée par défaut avec la précision désirée. Cet algorithme,

chiffres significatifs. L'élève doit apprendre, sans justification théorique sous-jacente, à se débarrasser de chiffres encombrants et douteux grâce aux troncatures et aux arrondis[20].

Les trois états du résultat

Le calcul d'une expression numérique se termine avec la production d'un unique nombre appelé résultat.

Voici une affirmation dont les fondements théoriques ne sont pas explicités en classe mais qui agit comme une règle contractuelle entre l'enseignant et l'élève "calculateurs. L'unicité du résultat qui réalise le calcul (il lui restitue sa réalité) en permet, en effet, la critique objective. Elle autorise à la fois la contestation et la validation du résultat mais elle doit s'accommoder de la multiplicité des écritures du nombre. Le professeur rejette 5,828 qui ne remplace pas $3+2\sqrt{2}$ comme résultat de $(1+\sqrt{2})^2$ et il accepte $3+\sqrt{8}$. Notons que la calculatrice maintient l'unicité du résultat au prix d'une décimalisation qui fournit prétexte à de nombreuses contestations.

Une deuxième règle contractuelle intervient alors : *le résultat est soit exact, soit approché, soit inexact.*

Ces trois états distincts du résultat (aussi appelés valeurs) organisent la coexistence entre l'exactitude et l'approximation (ou plutôt la proximité), coexistence mise à mal par l'usage de la calculatrice. Les contestations sur l'exactitude du résultat proposé n'aboutissent pas nécessairement à son rejet car elles peuvent s'accommoder de l'annonce publique d'une approximation. L'enjeu est alors quelquefois reporté sur la précision de cette approximation. La précision devient le chemin vers l'exactitude.

Dans le calcul de $(1+\sqrt{2})^2$, s'il annonce 5,82842712474, avec tous les chiffres de sa calculatrice, l'élève manifeste sa volonté de répondre *le plus exactement possible* et espère que le professeur appréciera ce souci d'exactitude. Mais ce dernier n'accepte pas la remise en cause du contrat de simplification s'il juge qu'il n'y avait pas de doute sur ses intentions.

La règle n'est pas employée seulement par l'élève qui "fuit" ses responsabilités. Elle sert aussi au professeur qui demande de calculer avec le nombre x de l'intervalle [0 ; π/2], dont le cosinus est 0,3 ($x = \cos^{-1} 0{,}3$), qui sait ne pas disposer d'autres écritures pour engager des procédures de simplification (avec les nombres transcendants, il faudrait des outils plus perfectionnés comme les nombres complexes ou les séries entières) et qui va se contenter, sans justifier pleinement sa démarche, de la valeur approchée fournie par la calculatrice.

Un contrat fonctionne d'autant mieux qu'il peut s'articuler autour de quelques règles pérennes qui permettent aux partenaires (élèves et enseignant) de penser et

---

comme celui de la division, normalisait l'approximation sous sa forme décimale et éludait ainsi la délicate question de la recherche de la précision obtenue par un algorithme.

20. Notons que certaines calculatrices proposent des algorithmes pour simplifier (simplifier les fractions mais aussi au-delà pour la nouvelle TI-92). Outre que leurs performances et leurs champs d'action sont encore très limités (nombre de chiffres par exemple), elles présentent, aux yeux de l'enseignant, le vice rédhibitoire d'opacifier la démarche mathématique, de transformer la simplification en exécution dont les qualités formatrices sont jugées douteuses.

d'agir[21]. Ces règles ne reçoivent pas de consécration officielle, elles sont sujettes à des évolutions et à des adaptations locales, elles acceptent des interprétations différentes chez les uns et chez l'autre, mais, par leur prégnance, elles servent de références pour la poursuite de l'enseignement et constituent autant de "significations didactiques" (Joshua, 1988) du savoir concerné.

Celles que nous avons dégagées ici, à partir des hypothèses présentées précédemment, nous paraissent suffisamment stables et générales pour traduire un large éventail de comportements. Malgré leurs effets contradictoires, elles peuvent coexister dans une même situation didactique.

Cinquième partie

Pour pouvoir observer certaines manifestations du contrat, nous avons imaginé pour des élèves de seconde une série d'exercices qui croise deux méthodes :

- placer les élèves hors du contrat habituel,
- obliger les élèves à un débat suivi d'une décision.

Aussi certains exercices ont été conçus avec l'idée que l'élève cherchera à inscrire sa réponse dans les règles du contrat alors que la question rompt avec le contrat. Des qualités de cette rupture dépend la possibilité pour nous d'interpréter la réponse[22]. D'autres exercices provoquent un débat entre deux élèves confrontés à deux résultats différents et nous essayons de comprendre la décision prise par les deux protagonistes.

Nous reproduisons, dans l'annexe 2, l'ensemble des fiches fournies aux élèves lors de cette expérimentation, présentée aux élèves et aux professeurs comme une séance modulaire (durée de la séance : 1 h 20 ; nombre d'élèves ≤ 18). Sept classes du lycée Pierre du Terrail à Pontcharra, soit un peu plus de 200 élèves y ont participé, en février 1996.

L'expérimentation contient dix expressions numériques à calculer. Dans un premier temps, chaque expression (E) reçoit deux réponses RA et RB de la part de deux élèves *A* et *B*. *L'élève A* dispose d'une feuille de brouillon sans calculatrice tandis que *l'élève B* dispose d'une calculatrice sans feuille de brouillon. Les deux élèves A et B fournissent des résultats individuels puis sont réunis en paires *A-B*. Dans un deuxième temps, chaque *paire A-B*, disposant de calculatrices et de feuilles de brouillon, examine les réponses RA et RB puis produit une réponse RAB.

---

21. Nous pourrions parler de *clauses* mais ce terme juridique évoque des engagements écrits et des signatures que l'on chercherait en vain dans notre contrat. Citons de nouveau Chevallard (1988) : "De l'entrée dans le contrat procède un savoir qui ne peut être mis en texte. Savoir pratique par excellence (comme dirait Bourdieu), exemplairement rebelle à toute recension qui se voudrait exhaustive, il tire de cela même son efficacité particulière. Toute objectivation intempestive (et nécessairement locale, partielle) en brouillerait le fonctionnement".

22. D'après Schubauer-Leoni (1988) : "C'est en effet dans ces cas de violation du pacte, que certaines règles sont alors énoncées et que la nature du contrat apparaît...Etudier ce qui est implicite dans la gestion contractuelle de la relation tripolaire (enseignant, élève, savoir), nécessite la mise en oeuvre de démarches, de recherches aptes à atteindre le jeu des attentes mutuelles sans pour autant en entraver le fonctionnement".

Nous présentons, ici, un extrait de cette expérimentation, autour des trois premiers exercices.

Analyse des exercices

Tous les exercices sont bâtis sur le même socle mathématique contenu dans la consigne : calculer une expression numérique (Ei). L'usage ou le non-usage de la calculatrice est imposé et la rédaction d'explications est fortement suggérée.

En décidant d'indiquer l'action mathématique par le seul verbe *calculer*, nous réduisons pour l'élève les possibilités d'interpréter l'intention didactique. Il lui reste la consigne sur la calculatrice -interdiction ou autorisation - et l'écriture de l'expression numérique dont nous pensons qu'elle sert de balise fortement ancrée au contrat.

Pour cette écriture, nous avons croisé deux variables : la nature des nombres (entier, décimal non entier, non décimal) et les symboles opératoires (division avec trait de fraction, division avec le symbole : puissances, radicaux).

Nous avons aussi, par référence à nos hypothèses, utilisé la variable "territorialité" avec trois valeurs : territoire interdit à la calculatrice (T1), territoire recommandé à la calculatrice (T2), territoire autorisé à la calculatrice (T3). Nous avons évité que les calculs soient réalisables mentalement tout en les laissant à la portée d'un élève de niveau moyen.

Nous vérifions l'activité des règles contractuelles repérées précédemmment en examinant les conduites des élèves *A*, des élèves *B*, celles des paires *A-B* et leurs choix. Par exemple, le calcul de $19-12:7$ s'intègre, d'après nos hypothèses, dans un contrat d'exécution dans l'ensemble D, que nous appelons contrat décimal, avec calculatrice autorisée voire recommandée. Ce contrat induit chez l'élève, même démuni de calculatrice, une conduite décimale. C'est en interdisant la calculatrice à l'élève que nous dévoilons le contrat car l'effet contractuel continue à s'exercer, en produisant des nombres décimaux au lieu de $\frac{121}{7}$.

Détaillons les réponses possibles pour chacun des trois calculs choisis.

• (E1) 19 - 12 : 7

Élève A - Cette division "qui ne tombe pas juste" doit quand même être effectuée sinon il serait écrit $19-\frac{12}{7}$. Telle devrait être la réaction de cet élève. Restera le choix du nombre de chiffres après la virgule. On peut donc s'attendre principalement aux réponses suivantes :

17,2 ; 17,28; 17,285] conduite décimale

$\frac{121}{7}$] conduite fractionnaire

mais aussi à 1 par refus de priorité ou par évitement de la division ; et accessoirement à $17,\underline{285714}$ qui traduit une connaissance sur les écritures décimales illimitées des nombres rationnels.

Élève B - Pour cet élève, il suffit d'exécuter le calcul et de choisir le nombre de chiffres après la virgule en arrondissant ou pas.

L'absence de consigne et de renseignement concernant la précision attendue conduira, soit à la mise en évidence de tous les chiffres de la calculatrice (l'exactitude assurée à force de précision), soit au choix d'une approximation décimale "raisonnable" (10^{-2}, 10^{-3}, ..).

Paire A-B - Nous déduisons de nos analyses préalables que la lecture décimale de l'expression va primer la lecture fractionnaire et que l'efficacité d'une calculatrice emportera la conviction de tous ceux qui n'associent pas l'exactitude à l'écriture fractionnaire. Nous envisageons aussi une remise en cause locale de l'unicité du résultat sous la forme d'une fausse égalité comme $\frac{121}{7} = 17{,}285$ ou comme $\frac{121}{7} \approx 17{,}285$.

• (E2) $\dfrac{\frac{47}{13}+\frac{1}{21}}{\frac{5}{7}-\frac{12}{39}}$

Voici un exercice au coeur du contrat fractionnaire habituel exprimé généralement par le verbe simplifier qui va conduire *l'élève A* vers $\frac{1000}{111}$ ou toute autre écriture fractionnaire exacte ou inexacte mais gêner *l'élève B* qui n'imagine pas de se retrouver seul avec la calculatrice pour réussir ce calcul. Le recours aux parenthèses ou aux mémoires de la machine lui est pénible. Pourtant 13x21=7x39 et il reste à effectuer d'une part, 47x21+13, d'autre part, 5x39-12x7 pour obtenir l'écriture $\frac{1000}{111}$. En fait, la calculatrice est là pour obtenir de "bonnes" valeurs approchées décimales et on peut s'attendre à toutes les écritures décimales possibles comme 9 ou 9,009 ou 9,1 ; etc....

Lors de la confrontation *A-B*, l'écriture fractionnaire devrait nettement plus se maintenir que dans l'exercice (E1) puisque l'expression numérique à calculer ne comporte que des fractions.

• (E3) $\dfrac{15:7}{14:5}$

La présence du trait de fraction peut conduire *l'élève A*, malgré la *mixité* de l'écriture ($a \div b$ et $\frac{a}{b}$), sur les schèmes contractuels de la simplification et aboutir à des réponses exactes $\frac{75}{98}$ ou inexactes $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, 6.

L'élève *B* devrait en rester à une exécution du calcul soit sous forme linéaire $(15 \div 7) \div (14 \div 5)$ soit sous forme arborescente du type :

15 ÷ 7 EXE 2,14 -------
| ---------> 2,14 ÷ 2,7
14 ÷ 5 EXE 2,7 --------

La confrontation *A-B* consistera, d'après nous, à vérifier que $\frac{75}{98} = 0,765...$ et l'importance relative du choix de $\frac{75}{98}$ indiquera l'attractivité du contrat fractionnaire.

Sixième partie

Nous disposons de deux sources d'informations sur le comportement de l'élève ou de la paire d'élèves : d'une part, le résultat qu'il ou elle présente pour l'expression désignée, d'autre part, les commentaires et explications qu'il ou elle accepte de fournir sous la forme de calculs intermédiaires, de calculogrammes ou de commentaires. Il faut y ajouter quelques indiscrétions orales recueillies par les professeurs qui nous furent transmises et une séance d'enregistrements de certains débats chez les paires *A-B* [23]. S'il est assez facile de recenser et de dénombrer les résultats, il s'avère plus délicat de prendre en compte les explications associées car elles sont brouillonnes et très diverses. Nous nous efforcerons cependant d'en intégrer quelques unes dans notre analyse.

Pour chaque expression numérique (Ei), nous présentons :
- un tableau des effectifs (ramenés à 100) des types de réponses des élèves A et *B*
- un exemple de réponse d'une paire *A-B*.

Légende pour tous les tableaux
Conduite fractionnaire

Conduite décimale

Expression (E1)	**A**	**B**	**A-B**
fraction 121/7	23	6	20
17,2 ou 17,28 ou 17,285 ou toute valeur décimale approchée [24]	53	58	52
17,... avec tous les chiffres de la calculatrice	-	18	12
17,285714	0	3	3
1	21	14	7
autre résultat	3	1	0
double résultat	0	0	6
TOTAL	100	100	100

23. Cette séance a eu lieu fin octobre 1996. Son exploitation n'est pas intégrée dans cet article.

24. Il s'agit des valeurs décimales approchées, par défaut ou par excès, à 10^{-n} près où n est un entier naturel.

A	17,3	$\frac{12}{7} = 1{,}7$; $19 - 1{,}7 = 17{,}3$
B	17,29	$19 - 12 : 7 = 17{,}29$
A-B	17,29	nous avons choisi le calcul avec calculatrice parce que le calcul numérique ne permet pas de terminer $\frac{12}{7}$ ce qui fausse légèrement le résultat

Expression (E2)	**A**	**B**	**A-B**
fraction 1000/11 ou autre fraction exacte	21	8	21
fraction[25] inexacte	29	2	5
9,009 ou autre valeur décimale approchée	7	41	34
9,... avec tous les chiffres de la calculatrice	0	11	9
9,009	0	11	7
autre résultat décimal	16	19	19
double résultat	1	1	4
rien ou abandon	26	7	1
TOTAL	100	100	100

A	1000/111	on réduit $\frac{47}{13} + \frac{1}{21}$ au même dénominateur puis on fait la même chose pour $\frac{5}{7} - \frac{12}{39}$
B	9,01	$(47 : 13 + 1 : 21) : (15 : 7 - 12 : 39) = 9{,}01$ chiffre arrondi
A-B	1000/111	la fraction est plus précise

Expression (E3)	**A**	**B**	**A-B**
fraction 75/98 ou autre fraction exacte	45	7	33
fractions 3/2 , 2/3 ou 6 ou 1,5	6	5	4
autre fraction inexacte	8	0	0
0,7 ; 0,76 toute valeur décimale approchée	19	56	42
0,765... avec tous les chiffres de la calculatrice	–	22	11
autre résultat décimal	11	5	2
autre résultat[26]	5	0	0
double résultat	1	4	7
rien ou abandon	5	1	1
TOTAL	100	100	100

25. Le terme fraction est employé pour les fractions de nombres entiers seulement et ceci pour toute la suite de l'analyse.
26. Fraction de nombres décimaux non entiers

A	$\frac{75}{98}$	$\frac{15}{7}:\frac{14}{5}=\frac{15}{7}\times\frac{5}{14}=$
B	0,765306122449	(15:7):(14:5) on ne peut pas faire de fractions
A-B	0,765306122449	mêmes résultats sur A et B (A en valeur exacte) machine B + de décimales.

Quelques commentaires

L'élève A, privé de calculatrice, réagit en respectant la consigne incluse dans les symboles opératoires ; sa conduite est fractionnaire, là où les fractions sont identifiables. L'élève B, la calculatrice en main, choisit une conduite décimale. La confrontation A-B effrite sensiblement la conduite fractionnaire au profit de la décimalisation du résultat. Les autres exercices nous conduisent aux mêmes constatations. Dès que la consigne professorale, directement ou par interprétation, donne *pouvoir* à la calculatrice, ce *pouvoir* n'est guère contesté. Pour preuve, l'exercice(E6) où presque toutes les réponses proposées par les paires *A-B* proviennent d'une exécution par la calculatrice sans recherche apparente du résultat exact. Mais, si la consigne professorale fait fortement référence au mode de simplification, comme dans l'exercice (E8), le *pouvoir* de la calculatrice est remis en cause : le résultat proposé peut être celui de la simplification après contrôle, grâce à la calculatrice, de son identification avec le résultat décimal obtenu par exécution. Ces observations s'inscrivent dans nos hypothèses.

Par contre, l'expérimentation nous pousse à revenir sur les règles contractuelles que nous avons formulées en intégrant plus lisiblement la double constatation suivante : l'élève traduit la recommandation d'utiliser la calculatrice, et encore plus l'obligation, comme un droit à afficher, pour lieu et place du résultat du calcul, le nombre décimal obtenu par lecture directe de l'écran et il agit comme si l'évaluation professorale portait sur le *maniement* de la calculatrice alors que l'attente professorale concerne ce que le professeur appelle la *maîtrise* du calcul à l'aide de la calculatrice. L'élève donne à la calculatrice la responsabilité du travail mathématique inscrit dans le calcul pour ne prendre à sa charge qu'un travail de transcription du calcul en une suite d'instructions pour la machine (un *calculogramme,* dont la ressemblance avec un programme de calcul ne doit pas faire illusion mathématique.

Nous mettons le doigt sur un des effets du contrat, qui, dans sa nature actuelle, développe très peu d'interactivité mathématique entre le calculateur et la calculatrice.

Septième partie

A parler de présence didactique de la calculatrice, nous refusions d'emblée l'idée de la neutralité de la calculatrice dans les actes d'enseignement et les processus d'apprentissages. La calculatrice, comme instrument de calcul, vit dans l'enseignement actuel du calcul numérique, sous le gouvernement d'un contrat didactique qui lui est spécifique, dont notre étude a recherché les ressorts. Sa

spécificité tient, nous pensons l'avoir montré, dans la définition d'un rôle pour la calculatrice et dans l'organisation des jeux de ce rôle.

Les jeux du rôle : se taire dans les calculs dont on attend le résultat exact ; intervenir rapidement et sûrement dans les calculs, dont on n'attend pas le résultat exact, pour fournir une valeur décimale approchée fiable de ce résultat.

Par l'analyse des manuels et avec l'aide de l'expérimentation, nous avons dégagé les actes de ce contrat, à savoir les règles reconnues par l'enseignant et les élèves comme régissant leur travail en commun sur le calcul numérique. Cette étude débouche, nous semble-t-il, sur une meilleure connaissance du contrat qui devrait nous permettre d'expliquer certains comportements des enseignants et des élèves dans des situations didactiques mettant en jeu du calcul numérique et l'usage de la calculatrice. Elle rebondit alors sur d'autres questions : ce contrat peut-il évoluer ? ce contrat doit-il évoluer ? questions auxquelles il serait prétentieux de répondre en restant dans le cadre originel de cet article. En guise de conclusion et pour ne pas esquiver lâchement le débat, il nous semble qu'on n'échappera pas à une étude plus approfondie de la transposition didactique.

Un des problèmes majeurs de la transposition didactique est la construction de l'ensemble R. Ce que nous révèle notre étude, c'est la domination des systèmes de nombres D et Di qui diabolisent les ensembles Q et R et réduisent la construction de R à l'adjonction de nombres non décimaux à l'ensemble D. De là découle l'incongruité de R par absence de sens pour les nombres réels. En effet, la nécessité de R n'est révélée qu'au travers de nombres non décimaux présentés comme exceptionnels et traités, soit par les règles de simplification limitées aux fractions et aux radicaux, soit par la décimalisation. L'accent mis sur la simplification pour s'opposer à la décimalisation dévolue aux calculatrices, tente en vain de remplacer une construction de R capable de donner un sens numérique au concept de nombre réel ; nous ne sommes pas sûrs que le passage par le cadre géométrique, sous la forme d'une bijection entre l'ensemble des points d'une droite et celui des nombres réels, suffise à combler ce vide numérique.

Un autre problème majeur de la transposition didactique est le calcul approché. Ce que nous révèle aussi notre étude, c'est l'effacement de la notion d'approximation qui se confond maintenant avec celle de valeur décimale approchée. L'obligation faite à l'enseignement du calcul numérique, d'utiliser et d'interpréter les résultats décimaux des calculatrices, peut expliquer ce phénomène ; le calcul approché, dans l'enseignement secondaire, privé de légitimité, se meurt lentement, entraînant dans son agonie, savoirs et pratiques qui lui étaient attribués. C'est l'analyse numérique qui reprend, à sa charge, les besoins en calcul approché et le report, sur la classe de seconde des premiers contacts avec la valeur absolue, renforce ce transfert.

Mais nous ne devrions pas enfermer notre réflexion au seul niveau de la transposition didactique. Dégager des repères épistémologiques sur la nature du calcul numérique[27] et ses rapports avec d'autres sciences, notamment l'algorithmique et l'informatique, visiter l'histoire comparée du calcul numérique et des instruments de

27. Le calcul d'un nombre dérivé, celui d'une intégrale, celui de la somme d'une série relèvent-ils du calcul numérique ?

calcul[28], suivre l'introduction dans l'enseignement secondaire de la nouvelle génération de calculatrices capables de calculs formels, prendre en compte les conditions et les conséquences de l'appropriation d'un instrument de calcul[29], poursuivre l'analyse des conceptions des élèves et des enseignants sur le calcul numérique et sur les calculatrices, construire des situations didactiques nouvelles avec les calculatrices, voilà autant d'approches croisées pour enrichir nos connaissances sur l'objet premier de notre étude : la cohabitation, dans l'enseignement secondaire, entre le calcul numérique et la calculatrice.

Bibliographie

ASSUDE T. (1994) Écologie de l'objet "racine carrée" et analyse du curriculum, *Petit x*, n° 35, IREM de Grenoble

BIREBENT A. (1996) *Cohabitation dans l'enseignement secondaire entre le calcul numérique et la calculatrice : le point de vue du contrat didactique*, DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Joseph Fourier, Grenoble

BESSOT A., LE THI HOAI A. (1993-94) Une étude du contrat didactique à propos de la racine carrée, *Petit x*, n° 36, IREM de Grenoble

BRONNER A. (1997) *Étude didactique des nombres réels : idécimalité et racine carrée*, Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble 1

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 7/2, La Pensée Sauvage : Grenoble

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, (2nde édition, 1991). La Pensée Sauvage : Grenoble

CHEVALLARD Y. (1987) *Sociétés, mathématisations, mathématiques, sociétés*, Publication de l' I.U.F.M. d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1988) *Deux études sur les notions de contrat ou de situation*, Publication de l' IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, *petit x*, n°5, n°19, n°23, IREM de Grenoble

28. Dans quelle mesure l'invention d'un instrument de calcul agit-elle sur la production mathématique en accompagnant son intégration sociale ?
29 Nous pensons aussi aux procédures langagières (les caculogrammes, par exemple) sans lesquelles il n'y a pas d'accès à la calculatrice ; dispose-t-on, avec les calculatrices, d'un nouveau registre dans le langage symbolique mathématique ?

CLAROU P. (1994-995) Réflexions à propos de l'utilisation des calculatrices dans l'enseignement, *Petit x*, n°39, IREM de Grenoble

CLAROU P. (1995-996) Réflexions à propos de l'utilisation des calculatrices dans l'enseignement, *Petit x*, n°40, IREM de Grenoble

C.O.P.R.E.M. (1987) *Contributions à l'enseignement mathématique contemporain. Le calcul numérique,* C.N.D.P.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 7/2, La Pensée Sauvage : Grenoble

IZORCHE M.L. (1977) *Les réels en classe de seconde*, Mémoire de D.E.A. Université de Bordeaux 1

JACQUIER I. (1996) Quelles conceptions des nombres chez les élèves de troisième ? *Petit x*, n° 41, IREM de Grenoble

JOSHUA S. (1988) Le contrat didactique et l'analyse des phénomènes didactiques, *Interactions Didactiques Recherches*, n°8. Université de Genève.

JOSHUA S., DUPIN J.J. (1993) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, Presses Universitaires de France : Paris

KUNTZ G. (1993) L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a, *Repères IREM,* n°11

MARGOLINAS C. (1988) Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels, *Petit x*, n° 16, IREM de Grenoble

NEYRET R. (1995) *Contraintes et déterminations des processus de formations des enseignants : nombres décimaux, rationnels, réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres,* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble 1

OLIVIER Y., BOUVIER J.P. (1994) *Calculatrices en mathématiques,* C.R.D.P. Poitou-Charentes.

RABARDEL P. (1995) Qu'est-ce-qu'un instrument ? *Les dossiers de l'Ingénierie éducative,* n°19. C.N.D.P.

ROBERT A. (1993) Éléments de réflexion sur l'utilisation des calculatrices programmables en première S et en terminale C et D, *Repères IREM*, n°11

SCHUBAUER-LÉONI M.L.(1988) Le contrat didactique dans une approche psycho-sociale des situations d'enseignement, *Interactions Didactiques Recherches*, n° 8, Université de Genève.

TROUCHE L. (1994) Calculatrices graphiques, la grande illusion, *Repères IREM*, n°14.

Annexe 1
Extrait de Terracher (1994) Maths Seconde, éd. Hachette, pp. 19 et 21

B – PRATIQUE DU CALCUL NUMÉRIQUE

? *Cela est sûr : le calcul est l'activité de base dans tous les problèmes numériques. D'où la présence ici de quelques problèmes calculatoires, mais pas n'importe comment...*
L'échantillon de tels problèmes est certes modeste, mais veut être significatif de la diversité des réponses qu'amènent le calcul exact (« à la main »), le calcul-machine (que nous limiterons ici à la calculatrice) et l'estimation d'un résultat.

I CALCUL EXACT

Exercice résolu (D'après *Nouveaux Jeux de l'Esprit et divertissements mathématiques*. J.-P. Alem. Éd. Seuil.)

1° *Que vaut* $x = 83\,875\,683\,470^2 - 83\,875\,683\,469 \times 83\,875\,683\,471$?

2° *Simplifier l'écriture de A et de B :*

$$A = \frac{(3^2 \times 10^{-2})^5}{(3 \times 10^{-4})^3} \times \left(\frac{1}{30}\right)^2 \; ; \; B = \left(\frac{4}{3}\right)^{50} \times 0{,}75^{51} .$$

1° La taille des nombres impliqués condamne la calculatrice au chômage technique(1) et nous dissuade de faire les calculs à la main.
Cela dit, observons que les trois entiers figurant dans l'écriture de x sont voisins.
Posons alors $\boldsymbol{a = 83\,875\,683\,470}$.
Le nombre x s'écrit $x = a^2 - (a-1)(a+1)$.
Comme $(a-1)(a+1) = a^2 - 1$, il vient $x = a^2 - (a^2 - 1)$, d'où finalement $x = \mathbf{1}$.

2° *a) Calcul de A*
Seuls les entiers 3 et 10 interviennent dans l'écriture de A (noter : $30 = 3 \times 10$).
De là, l'idée directrice du calcul : essayer d'obtenir pour A une écriture de la forme $A = 3^m \times 10^n$ (m et n entiers à trouver). Allons-y, courage :

$$A = \frac{(3^2)^5 \times (10^{-2})^5}{3^3 \times (10^{-4})^3} \times \frac{1}{(3 \times 10)^2} = \frac{3^{10} \times 10^{-10}}{3^3 \times 10^{-12} \times 3^2 \times 10^2} = \frac{3^{10} \times 10^{-10}}{3^5 \times 10^{-10}},$$

c'est-à-dire $A = 3^{10-5} = 3^5$.
Conclusion : $A = 3^5 = \mathbf{243}$.

b) Calcul de B

La seule remarque $0{,}75 = \frac{3}{4}$ guide le calcul :

$$B = \left(\frac{4}{3}\right)^{50} \times (0{,}75)^{51} = \left(\frac{4}{3}\right)^{50} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{51} = \frac{4^{50} \times 3^{51}}{3^{50} \times 4^{51}} = \frac{3^1}{4^1}, \text{ d'où } B = \frac{3}{4}.$$

À noter : On évite (si l'on peut) l'écriture « $\frac{3^1}{4^1}$ », on écrit directement $\frac{3}{4}$.



Regrouper et **simplifier** sont les maîtres-mots du calcul à « la main » :
- **Regrouper les termes :** *Il faut regarder* la forme, l'allure (la structure, si l'on y tient) de l'expression pour se faire une idée de l'écriture qu'on peut espérer obtenir (pour le calcul de A par exemple, nous espérons l'écriture $A = 3^m \times 10^n$). Voilà ce qui nous guide dans la manière de regrouper les termes.
- **Simplifier :** C'est simple : utiliser les propriétés dégagées sur ce sujet (réduction de termes, simplification de quotients, de puissances, produits remarquables...).

(1) Les capacités d'affichage sont dépassées.

2 LE CALCUL-MACHINE

Exercice résolu *Effectuer les calculs suivants à l'aide de la calculatrice et présenter les résultats en notation scientifique :*

$$A = \left(\frac{5}{3} \times 10^{-3}\right)^2 - 2{,}2 \times 61 \times 10^{-4} \; ; \; B = \frac{3{,}01 \times 10^{-2} + 0{,}73 \times 10^{-1}}{95{,}2 \times 10^3}.$$

■ Calculons A par la séquence-machine suivante :

5 [EXP] 3 [+/-] [÷] 3 [=] [x²] [−] 2,2 [×] 61 [EXP] 4 [+/-] [=] .

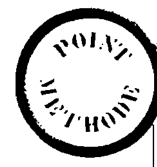
Vient à l'affichage – 0.0134172 .
Et donc, en notation scientifique, $A = -1{,}34172 \times 10^{-2}$.

■ Le calcul de B pourra s'effectuer par la séquence :

3,01 [EXP] 2 [+/-] [+] 0,73 [EXP] 1 [+/-] [=] [÷] 95,2 [EXP] 3 [=] .

Le résultat affiché 1.08298⁻⁰⁶ est en rotation scientifique. Nous écrirons :

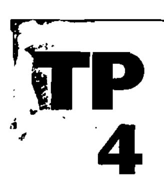
$$B \approx 1{,}082\,98 \times 10^{-6}.$$



Aussi sophistiquée soit-elle, une calculatrice ne pense pas !
C'est à *nous* de réfléchir et, pour le moins, sur les deux points suivants :

■ **L'organisation des calculs**
Une séquence-machine doit respecter les priorités algébriques du calcul :
— touches *fonctionnelles* d'abord ([1/x], [√], [x²]) ; ensuite et dans l'ordre :
— les *puissances* [xʸ] ;
— les *produits* et *quotients* [×] et [÷] ;
— les *sommes* et *différences* [+] et [−].
Noter que l'instruction [=] permet d'effectuer un calcul partiel sans avoir recours aux parenthèses [(] et [)].

■ **Lecture du résultat**
Le résultat n'est pas toujours exprimé en notation scientifique.
Certaines calculatrices travaillent en notation scientifique dans un « mode » spécial (MODE SCI) qui permet de choisir le nombre de chiffres significatifs désirés.
En tout état de cause, il n'est que temps de retrouver le **manuel d'utilisation** de sa calculatrice.



1 Écrire en notation scientifique :
– 519 ; 0,000 85 ; 471,08.

2 Quels sont les nombres à l'affichage ?
– 1.03⁰⁷ ; 2.16⁻⁰⁵ .

3 Une des trois égalités ci-contre est fausse. Laquelle ?

a) $29{,}1 \times 10^{-3} - 1{,}05 \times 10^{-1} = -7{,}59 \times 10^{-2}$;

b) $(41{,}5 \times 10^{-7}) \times (-9 \times 10^5) = -747 \times 200^{-1}$;

c) $51 \times 10^{-4} + 51 \times 10^4 = 0$.

4 Écrire a et b en notation scientifique :

$$a = \left(\frac{2}{7} \times 10^{-4}\right)^2 - 51{,}73 \times 10^{-6} \; ;$$

$$b = \frac{10^{-7} - 3 \times 10^{-6}}{10^{-7} + 3 \times 10^{-6}}.$$

Annexe 2
Fiches élèves

Seconde ... - Modules de mathématiques - Janvier 1996 Calculs numériques avec ou sans calculatrice

A	

Première partie (25 - 35 minutes)

Il vous est demandé de calculer chacune des dix expressions numériques. Vous disposez d'une feuille de brouillon sans calculatrice. Présentez les résultats sur le tableau de résultats n° 1, en les accompagnant de quelques calculs intermédiaires et des commentaires que vous jugez nécessaires.

(E1) $19-12:7$	(E2) $\dfrac{\dfrac{47}{13}+\dfrac{1}{21}}{\dfrac{5}{7}-\dfrac{12}{39}}$	(E3) $\dfrac{15:7}{14:5}$	(E4) $\left(\dfrac{9000}{7}-1285\right)\times 7000$
(E5) $\dfrac{1{,}26\times 6{,}5}{2{,}1\times 0{,}26}$	(E6) (5 213 865,813 + 4 786 134,18721) : (3 712 458 + 6 287 542)		
(E7) $31250^{25}\times 0{,}04^{75}$	(E8) $\sqrt{2}+\sqrt{98}$	(E9) $\pi:3\times 2{,}5^2\times 2{,}4$	(E10) $\left(\dfrac{\pi+5}{6}-\dfrac{1-\pi}{2}\right)\times\dfrac{3}{2}$

TABLEAU DE RÉSULTATS N° 1

	Résultats	*Calculs intermédiaires et commentaires*
E1		
E2		
E3		
E4		
E5		
E6		
E7		
E8		
E9		
E10		

Seconde ... - Modules de mathématiques - Janvier 1996
Calculs numériques avec ou sans calculatrice

B	

Première partie (25 - 35 minutes)

Il vous est demandé de calculer chacune des dix expressions numériques. Vous disposez d'une calculatrice sans feuille de brouillon. Présentez les résultats sur le tableau de résultats n° 1, en les accompagnant des calculogrammes (séquences de touches de la calculatrice) et des commentaires que vous jugez nécessaires.

(E1) $19-12:7$	(E2) $\dfrac{\dfrac{47}{13}+\dfrac{1}{21}}{\dfrac{5}{7}-\dfrac{12}{39}}$	(E3) $\dfrac{15:7}{14:5}$	(E4) $\left(\dfrac{9000}{7}-1285\right)\times 7000$
(E5) $\dfrac{1,26\times 6,5}{2,1\times 0,26}$	(E6) (5 213 865,813 + 4 786 134,18721) : (3 712 458 + 6 287 542)		
(E7) $31250^{25}\times 0,04^{75}$	(E8) $\sqrt{2}+\sqrt{98}$	(E9) $\pi:3\times 2,5^2\times 2,4$	(E10) $\left(\dfrac{\pi+5}{6}-\dfrac{1-\pi}{2}\right)\times\dfrac{3}{2}$

TABLEAU DE RÉSULTATS N° 1

	Résultats	*Calculogrammes et commentaires*
E1		
E2		
E3		
E4		
E5		
E6		
E7		
E8		
E9		
E10		

Seconde ... - **Modules de mathématiques** - Janvier 1996
Calculs numériques avec ou sans calculatrice

AB

Deuxième partie (15 - 25 minutes)

Il vous est demandé de comparer vos résultats de la première partie. Vous disposez de calculatrices sans feuille de brouillon. Après discussion entre vous, vous inscrivez sur le tableau de résultats n° 2 un **seul** résultat par expression numérique et vous accompagnez votre choix d'une courte explication. Notez que ce choix peut différer des deux résultats obtenus dans la première partie.

(E1) $19-12:7$	(E2) $\dfrac{\frac{47}{13}+\frac{1}{21}}{\frac{5}{7}-\frac{12}{39}}$	(E3) $\dfrac{15:7}{14:5}$	(E4) $\left(\dfrac{9000}{7}-1285\right)\times 7000$
(E5) $\dfrac{1{,}26\times 6{,}5}{2{,}1\times 0{,}26}$	(E6) (5 213 865,813 + 4 786 134,18721) : (3 712 458 + 6 287 542)		
(E7) $31250^{25}\times 0{,}04^{75}$	(E8) $\sqrt{2}+\sqrt{98}$	(E9) $\pi:3\times 2{,}5^2\times 2{,}4$	(E10) $\left(\dfrac{\pi+5}{6}-\dfrac{1-\pi}{2}\right)\times\dfrac{3}{2}$

TABLEAU DE RESULTATS N°2

	Résultats	*Explications*
E1		
E2		
E3		
E4		
E5		
E6		
E7		
E8		
E9		
E10		